

**Аналитическое решение дифференциальных уравнений
тепло- и влагопереноса при инфракрасном нагреве
масличных семян**

Вороненко Б.А., Демидов А.С., Демидов С.Ф.

mtomz85@mail.ru

Санкт-Петербургский государственный университет низкотемпературных и
пищевых технологий

*Получено аналитическое решение дифференциальных уравнений
тепло- и влагопереноса при инфракрасном нагреве масличных семян.*

Ключевые слова: аналитическое решение, масличные семена, температура, влагосодержание, тепломассоперенос, дифференциальное уравнение.

**The analytical solution of differential equations of heat and
moisture transfer in infrared heating oil seeds**

Voronenko B.A., Demidov A.S., Demidov S.F.

mtomz85@mail.ru

Saint-Petersburg state university of refrigeration and food engineering

*An analytical solution of differential equations of heat and moisture transfer
during infrared heating oil seeds.*

Keywords: analytical solution, oil seeds, temperature, moisture, heat and mass transfer, the differential equation.

Процессы кондиционирования масличных семян по влажности и температуре являются типичными нестационарными процессами, которые протекают как с постоянной, так и с переменной (убывающей) скоростью. Все виды масличных семян, как объекты кондиционирования, с учетом анатомического строения, геометрических размеров и формы целесообразно подразделить на четыре группы [1, 2, 3, 4].

К первой группе относятся семена, плодовая (семенная) оболочка которых неплотно прилегает к семядолям, образуя воздушные полости; их геометрические размеры несоизмеримы и форма значительно отличается от сферической (например, семена подсолнечника).

Ко второй группе относятся семена с неплотно прилегающей плодовой (семенной) оболочкой, однако геометрические размеры семян этой группы

соизмеримы, поэтому их можно рассматривать как совокупность тел, имеющих форму, близкую к сферической (например, семена клещевины).

К третьей группе относятся семена с плотно прилегающей плодовой (семенной) оболочкой и несферической формы (например, семена льна).

К четвертой группе относятся семена с плотно прилегающей плодовой (семенной) оболочкой, по форме близкие к сферической (например, семена сои).

Одним из перспективных методов подготовки большого объема масличных семян к длительному и качественному хранению является их кондиционирование по влажности и температуре с использованием поля инфракрасного диапазона [5, 6].

Развитием идей работ [1, 2] является учет внутренних источников тепла при ИК-нагреве. Определенные сорта семян подсолнечника, особенно высокомасличные, в первом приближении можно принять имеющими форму, близкую к сферической. Тогда для нахождения полей температур и влагосодержаний в единичном семени подсолнечника с плотно прилегающей плодовой (семенной) оболочкой, рассматриваемом как двухслойное сферическое капиллярно-пористое тело (“оболочка - ядро”) можно применить систему дифференциальных уравнений совместного тепло- и массопереноса [7]:

$$\frac{\partial [rt_i \ r, \tau]}{\partial \tau} = a_{qi} \frac{\partial^2 [rt_i \ r, \tau]}{\partial r^2} + \frac{\varepsilon_i \rho_i}{c_{qi}} \frac{\partial [ru_i \ r, \tau]}{\partial \tau} + rQ_v; \quad (1)$$

$$\frac{\partial [ru_i \ r, \tau]}{\partial \tau} = a_{mi} \frac{\partial^2 [ru_i \ r, \tau]}{\partial r^2} + a_{mi} \delta_i \frac{\partial^2 [rt_i \ r, \tau]}{\partial r^2}. \quad (2)$$

Для зональной системы расчета теплофизические характеристики материала являются постоянными, усредненными величинами, различными для разных слоев.

Температура и влагосодержание окружающей среды в процессе кондиционирования семян подсолнечника изменяются незначительно. Кроме того, в рассматриваемом процессе термический перенос вещества не имеет существенного значения, т.е. $\delta_i = 0$ [8]. К моменту начала сушки семян в них устанавливается равномерное распределение температуры t_0 и влаги u_0 .

При инфракрасном нагреве мощность внутреннего источника теплоты Q_v снижается в зависимости от расстояния от поверхности оболочки по экспоненциальному закону [8, 9]:

$$Q_v = \frac{Q_0}{c_{q1} \gamma_{01}} e^{-k R_1 - r} \quad (3)$$

Материал оболочки семени предполагается прозрачным для инфракрасных лучей.

Так как толщина оболочки $R_2 - R_1 \ll R_1$, то для оболочки уравнения тепло- и массопереноса можно заменить несвязанными уравнениями теплопроводности и диффузии.

Отмеченные особенности термической обработки масличных семян приводят к решению упрощенной системы уравнений (1) – (2) при следующих начальных

$$t_i(r, 0) = t_0 = const; u_i(r, 0) = u_0 = const \quad (4)$$

и граничных условиях:

$$t_1(R_1, \tau) = t_2(R_1, \tau); \quad (5)$$

$$-\lambda_{q1} \frac{\partial t_1(R_1, \tau)}{\partial r} = -\lambda_{q2} \frac{\partial t_2(R_1, \tau)}{\partial r}; \quad (6)$$

$$u_1(R_1, \tau) = u_2(R_1, \tau); \quad (7)$$

$$-\lambda_{m1} \frac{\partial u_1(R_1, \tau)}{\partial r} = -\lambda_{m2} \frac{\partial u_2(R_1, \tau)}{\partial r}; \quad (8)$$

$$\frac{\partial t_1(0, \tau)}{\partial r} = \frac{\partial u_1(0, \tau)}{\partial r} = 0; \quad (9)$$

$$t_1(0, \tau) < \infty; u_1(0, \tau) < \infty; \quad (10)$$

$$t_2(R_2, \tau) = t_c = const; u_2(R_2, \tau) = u_p = const \quad (11)$$

Равенства (5) – (8) – граничные условия 4-го рода, заключающиеся в равенстве температур, влагосодержаний и потоков тепла и влаги на границе раздела ядра семени и его оболочки.

(9) – условия симметрии; (10) – условия физической ограниченности температуры и влагосодержания в центре шара.

Равенства (11) – граничные условия 1-го рода, задающие температуру t_c и влагосодержание u_p на поверхности семени.

Поставленная краевая задача (1) – (11) решена аналитически методом интегрального преобразования Лапласа. Распределения температур и влагосодержаний получены в следующем виде:

$$\begin{aligned}
T_{X, Fo} = & 1 + \left(2 - yX + 2y^2 \left(Fo + \frac{X}{2y} - \frac{1}{y^2} \right) \cdot \exp y^2 Fo \right) \times \\
& \times \frac{Po}{y^3 X} \exp -y(1-X) - \frac{Po}{y^3} \phi_0 + \\
& + \frac{\varepsilon Ko}{1 - \frac{1}{Lu_1}} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\phi_m X} \sin \mu_m X \exp -\mu_m^2 Lu_1 Fo \right) +
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
& + Po \phi_k \exp y^2 Fo + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{x} \phi_n \sin \mu_n X \exp -\mu_n^2 Fo ; \\
\Theta_{X, Fo} = & 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\phi_m X} \sin \mu_m X \exp -\mu_m^2 Lu_1 Fo .
\end{aligned} \tag{13}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\phi_0 = 2 - y - \alpha_q k_{\varepsilon_q} (y - 1)^2 + 1 ;$$

$$\begin{aligned}
\phi_k = & \left(2y^2 Fo + y \left(\frac{1}{\sqrt{Lu_1}} \frac{\gamma_{11k}}{\gamma_{1k}} - 2\sqrt{k_{a_q}} \frac{\gamma_{22k}}{\gamma_{2k}} \right) - \right. \\
& \left. - \left(1 + y \left(\frac{1}{k_{\varepsilon_q}} \frac{\gamma_{11k}}{\gamma_{1k}} + \frac{1}{Lu_1} \frac{\gamma_{22k}}{\gamma_{2k}} \right) \right) \right) \frac{sh yX}{y^2 X} + \frac{ch yX}{y} ;
\end{aligned}$$

$$\phi_m = 1 - \alpha_m k_{\varepsilon_m} \sin \mu_m \cos \alpha_m \mu_m +$$

$$+ \mu_m (1 + \alpha_m k_{\varepsilon_m} \cos \mu_m \cos \alpha_m \mu_m - \mu_m \alpha_m + k_{\varepsilon_m} \sin \mu_m \sin \alpha_m \mu_m) ;$$

$$\alpha_q = \sqrt{k_{a_q}} (k_R - 1) ; \quad \alpha_m = \sqrt{k_{a_m}} (k_R - 1) ;$$

μ_m - последовательные положительные корни характеристического уравнения

$$ctg \alpha_m \mu = k_{\varepsilon_m} \left(\frac{1}{\mu} - ctg \mu \right) ; \tag{14}$$

$$\phi_n = \frac{y \gamma_{1n} \gamma_{2n} Po}{\mu_n^2 + y^2 \phi_{1n} \phi_{2n}} ;$$

μ_n - последовательные положительные корни характеристического уравнения

$$ctg \alpha_q \mu = k_{\varepsilon_q} \left(\frac{1}{\mu} - ctg \mu \right); \quad (15)$$

$$\Phi_{1k} = \frac{y}{k_{\varepsilon_q}} sh y ch \alpha_q y + sh \alpha_q y \cdot y chy - shy ;$$

$$\Phi_{2k} = -2 \alpha_q k_{\varepsilon_q} sh \alpha_q y + y \sqrt{k_{a_q}} ch \alpha_q y ;$$

$$\Phi_{1n} = 1 - \alpha_q k_{\varepsilon_q} \sin \mu_n \cos \alpha_q \mu_n + \mu_n \left(1 + \alpha_q k_{\varepsilon_q} \cos \mu_n \cos \alpha_q \mu_n - \right. \\ \left. - \mu_n \alpha_q + k_{\varepsilon_q} \sin \mu_n \sin \alpha_q \mu_n \right) ;$$

$$\Phi_{2n} = \frac{\mu_n}{\sqrt{Lu_1}} \sin \frac{\mu_n}{\sqrt{Lu_1}} \cos \frac{\alpha_m \mu_n}{\sqrt{Lu_1}} + k_{\varepsilon_m} \sin \frac{\alpha_m \mu_n}{\sqrt{Lu_1}} ;$$

$$\gamma_{1k} = k_{\varepsilon_m} \left(ch \frac{y}{\sqrt{Lu_1}} - \frac{\sqrt{Lu_1}}{y} sh \frac{y}{\sqrt{Lu_1}} \right) sh \frac{\alpha_m y}{\sqrt{Lu_1}} + \\ + sh \frac{y}{\sqrt{Lu_1}} ch \frac{\alpha_m y}{\sqrt{Lu_1}} ;$$

$$\gamma_{2k} = -2k_{\lambda_q} y - 1 sh \alpha_q y + 2y \sqrt{k_{a_q}} ch \alpha_q y ;$$

$$\gamma_{11k} = \left(\alpha_m + k_{\varepsilon_m} \left(1 + \frac{Lu_1}{y^2} \right) \right) sh \frac{y}{\sqrt{Lu_1}} sh \frac{\alpha_m y}{\sqrt{Lu_1}} + \\ + 1 + \alpha_m k_{\varepsilon_m} ch \frac{y}{\sqrt{Lu_1}} ch \frac{\alpha_m y}{\sqrt{Lu_1}} - \frac{k_{\varepsilon_m} \sqrt{Lu_1}}{y} ch \frac{y}{\sqrt{Lu_1}} sh \frac{\alpha_m y}{\sqrt{Lu_1}} - \\ - \frac{\sqrt{Lu_1} \alpha_m k_{\varepsilon_m}}{y} sh \frac{y}{\sqrt{Lu_1}} ch \frac{\alpha_m y}{\sqrt{Lu_1}} ;$$

$$\gamma_{22k} = \alpha_q k_{\varepsilon_q} y - 1 + y + 1 ch \alpha_q k_{\varepsilon_q} y +$$

$$+ y \alpha_q + k_{\varepsilon_q} sh \alpha_q k_{\varepsilon_q} y ;$$

$$\Phi_{11k} = 1 - \alpha_q k_{\varepsilon_q} sh y ch \alpha_q k_{\varepsilon_q} y + y \left(1 + \alpha_q k_{\varepsilon_q} ch y ch \alpha_q k_{\varepsilon_q} y + \right.$$

$$\left. + y \alpha_q + k_{\varepsilon_q} shy sh \alpha_q k_{\varepsilon_q} y \right) ;$$

$$\begin{aligned} \varphi_{22k} &= -\alpha_m k_{\varepsilon_m} \operatorname{sh} \frac{y}{\sqrt{Lu_1}} \operatorname{ch} \frac{\alpha_m y}{\sqrt{Lu_1}} + \\ &+ \frac{y}{\sqrt{Lu_1}} \left(1 + \alpha_m k_{\varepsilon_m} \operatorname{ch} \frac{y}{\sqrt{Lu_1}} \operatorname{ch} \frac{\alpha_m y}{\sqrt{Lu_1}} + \alpha_m + k_{\varepsilon_m} \operatorname{sh} \frac{y}{\sqrt{Lu_1}} \operatorname{sh} \frac{\alpha_m y}{\sqrt{Lu_1}} \right); \\ \gamma_{1n} &= k_{\varepsilon_m} \left(\cos \frac{\mu_n}{\sqrt{Lu_1}} - \frac{\sqrt{Lu_1}}{\mu_n} \sin \frac{\mu_n}{\sqrt{Lu_1}} \right) \sin \frac{\alpha_m \mu_n}{\sqrt{Lu_1}} + \sin \frac{\mu_n}{\sqrt{Lu_1}} \cos \frac{\alpha_m \mu_n}{\sqrt{Lu_1}}; \\ \gamma_{2n} &= \mu_n^2 + y^2 \mu_n + y P_0 k_{\varepsilon_q} \mu_n^2 + (1 - y^2 + 1) \sin \alpha_q \mu_n + \\ &+ \frac{\mu_n}{y} \mu_n^2 + y^2 \cos \alpha_q \mu_n - 2 \end{aligned}$$

При мягких условиях сушки (температура семян $< 50^\circ\text{C}$ и отсутствии внутреннего источника тепла (инфракрасного излучения)) перенос влаги в материале происходит только в виде жидкости ($\varepsilon=0$). В этом случае исходная система уравнений (1) - (2) превращается в несвязанную систему уравнений тепло- и массопереноса, решение которой совместно с прежними граничными условиями приводит к известным решениям [7,10].

Выводы.

1. Решена краевая задача совместного тепло- и массопереноса, поставленная применительно к процессам кондиционирования масличных семян с плотно прилегающей плодовой (семенной) оболочкой, по форме близкой к сферической.
2. Полученное аналитическое решение дает возможность прогнозировать необходимые значения температуры и влагосодержания в масличном семени, время, необходимое для получения искомых конечных значений температуры и влагосодержания, и является основой для оптимизации процессов сушки масличных семян при термической обработке их электромагнитным полем выделенного электромагнитного диапазона.

Обозначения:

i - номер слоя, $i=1$ (ядро): $0 < r < R_1$; $i=2$ (оболочка): $R_1 < r < R_2$
 $t_i = t_i(r, \tau)$ - температура i -го слоя, $^\circ\text{C}$, K ; t_0 - начальная температура; t_c - температура окружающей среды; $\square t = t_c - t_0$;
 τ - время, с;
 r - текущая координата, м; R_i - радиус шара;
 $u_i = u_i(r, \tau)$ - влагосодержание семени, кг влаги/кг абс.сух.вещ.;

u_0 - начальное влагосодержание; индекс “р” в u_p указывает на равновесное состояние; $\square u = t_0 - t_p$;

a_{q_i} - коэффициент температуропроводности, $\text{м}^2/\text{с}$;

a_{m_i} - коэффициент потенциалопродности (влагопроводности), $\text{м}^2/\text{с}$;

ε_i - критерий фазового превращения $0 < \varepsilon < 1$;

ρ_i - удельная теплота фазового превращения, $\text{Дж}/\text{кг}$;

c_{q_i} - удельная теплоемкость, $\text{Дж}/(\text{кг}\cdot\text{К})$;

γ_{0_i} - плотность абсолютно сухого вещества, $\text{кг}/\text{м}^3$;

λ_{q_i} - коэффициент теплопроводности, $\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$;

λ_{m_i} - коэффициент массо- (влаго-) проводности, $\text{кг}/(\text{м}\cdot\text{К})$;

δ_i - термоградиентный коэффициент, $1/\text{К}$;

Q_v - мощность внутренних источников тепла, $\text{м}\cdot\text{К}/\text{с}$; Q_0 - объемная мощность ИК - источника, $\text{Вт}/\text{м}^3$; k - коэффициент поглощения ИК - энергии материалом, $1/\text{м}$;

$$x = \frac{r}{R_1}; \quad y = kR_1; \quad k_R = \frac{R_2}{R_1};$$

$$k_{a_q} = \frac{a_{q_1}}{a_{q_2}}; \quad k_{\lambda_q} = \frac{\lambda_{q_1}}{\lambda_{q_2}}; \quad k_{a_m} = \frac{a_{m_1}}{a_{m_2}}; \quad k_{\lambda_m} = \frac{\lambda_{m_1}}{\lambda_{m_2}};$$

$$k_{\varepsilon_q} = \frac{k_{\lambda_q}}{\sqrt{k_{a_q}}}; \quad k_{\varepsilon_m} = \frac{k_{\lambda_m}}{\sqrt{k_{a_m}}};$$

$$Fo = \frac{a_{q_1} \tau}{R_1^2} - \text{число (критерий) Фурье};$$

$$Lu_1 = \frac{a_{m_1}}{a_{q_1}} - \text{число Лыкова};$$

$$Ko = \frac{\rho \square u}{c_{q_1} \square t} - \text{число Коссовича};$$

$$Po = \frac{Q_0 R_1^2}{\lambda_{q_1} \square t} - \text{число Померанцева}; \quad \lambda_{q_1} = a_{q_1} c_{q_1} \gamma_{0_1};$$

$T_{X, Fo} = \frac{t_i - t_0}{t_c - t_0}$ - безразмерная (относительная) температура;

$\Theta_{X, Fo} = \frac{u_0 - u_i}{u_0 - u_p}$ - безразмерное (относительное) влагосодержание.

Литература:

1. Вороненко Б.А., Кириевский Б.Н. Решение дифференциальных уравнений тепло- и влагопереноса применительно к процессам кондиционирования масличных семян по влажности и температуре. // Труды ВНИИЖ, - Л.: 1979. - С.20 -26.
2. Белобородов В.В., Забровский Г.П., Вороненко Б.А. Процессы массо- и теплопереноса масло-жирового производства. – СПб.,ВНИИЖ, 2000. – 430 с.
3. Голдовский А.М. Теоретические основы производства растительных масел. - М.: Пищепромиздат, 1958. - 447 с.
4. Кириевский Б.Н. Исследование механизма и процесса сушки семян подсолнечника в кипящем слое. // Автореферат дисс. на соиск. уч. степ, к.т.н. - Воронеж, 1972. – 32 с.
5. Демидов А.С., Вороненко Б.А., Демидов С.Ф. Аналитическое исследование терморadiационной сушки масличного сырья при подготовке его к хранению.// Международная научно-практическая конференция “Инновационные технологии в пищевой промышленности”, Минск, 2011. – с. 27-31.
6. Вороненко Б.А., Демидов А.С., Демидов С.Ф. Решение системы уравнений тепло- и влагопереноса при инфракрасном нагреве масличных семян.// V Международная научно-техническая конференция “Низкотемпературные и пищевые технологии в XXI веке”, СПбГУНиПТ, ноябрь 2011 г.
7. Лыков А.В., Михайлов Ю.А. Теория тепло- и массопереноса. - М.-Л.: Госэнергоиздат, 1963. - 536с.
8. Рогов И.А., Некрутман С.В. Сверхвысокочастотный и инфракрасный нагрев пищевых продуктов. –М.: Пищевая пром-сть, 1976. – 218 с.
9. Ильясов С.Г., Красников В.В. Физические основы инфракрасного облучения пищевых продуктов. – М.: Пищевая пром-сть, 1978. – 360 с.
10. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967. – 600 с.