

**Разработка вычислительной системы параметров процесса
охлаждения хлебобулочных изделий на основе
математического моделирования**

Данин В.Б., Пастухов А.С.

valdurtera@rambler.ru

Санкт-Петербургский государственный университет
низкотемпературных и пищевых технологий

В данной статье рассмотрено влияние граничных условий на процесс теплопередачи с поверхности свежесвыпеченного буханки хлеба за счёт конвекции, излучения и испарения во время охлаждения после его выхода из печи. Построена математическая модель имитирующая тепло- и массообменные процессы во время охлаждения хлебобулочных изделий и разработана вычислительная система, позволяющая предсказать потерю массы продукта и температуру в различных точках во время процесса охлаждения. Проведённые исследования показали, что теплоотдача за счёт испарения при охлаждении хлебобулочных изделий играет незначительную роль по сравнению с теплоотдачей за счёт лучистого теплообмена.

Ключевые слова: охлаждения хлеба, теплообмен, массообмен, разработка вычислительной системы.

Mathematical modeling of the bakery products cooling process

Danin V.B., Pastukhov A.S.

Saint-Petersburg state university of refrigeration and food engineering

This article considers the influence of boundary conditions on the heat transfer from the surface of freshly baked loaf of bread by convection, radiation and evaporation during the cooling it after it is taken out from the oven. Have been studied the relative influence of these phenomena. And a two-dimensional model simulating heat and mass exchange processes during the cooling of baked goods have been developed. Studies have shown that heat transfer due to evaporation plays a minor role in comparison with heat transfer due to radiant heat transfer.

Key words: cooling of bread, heat transfer, mass transfer, mathematical modeling.

Технология производства хлеба представляет собой трудоёмкий и достаточно продолжительный процесс [1]. Тепло и массообменные процессы при приготовлении хлеба происходят во время расстойки и выпечки тестовых заготовок, а также во время охлаждения выпеченного изделия. В настоящее время опубликовано ряд научных работ, рассматривающих

вопросы математического моделирования процессов выпечки хлеба. Например работы Де Фриза[2] и Занони [3, 4]. Обширное исследование аспекта математического моделирования процесса выпечки хлебобулочных изделий можно найти в работе Саблани и др. [5]. Тем не менее, проведено немного исследований, направленных на изучение воздействий охлаждения свежевыпеченного хлеба на качество конечного продукта. Проблема расчёта параметров процесса является сложной задачей нестационарного тепло- и массообмена. Используются классические методы расчёта нестационарного теплообмена для тел ограниченных размеров (цилиндр и параллелепипед), такие как метод регулярного режима и метод элементарных тепловых балансов (метод Ваничева)[6]. Ван дер Слуйс [7] переработав компьютерную программу моделирования процесса охлаждения туш крупного рогатого скота, использующую метод конечных элементов, адаптировал её для моделирования процесса охлаждения хлебобулочных изделий. В этой программе теплообмен на поверхности буханки учитывает конвекцию и излучение, но не принимает во внимание потерю теплоты за счёт испарения. Таким образом, в настоящее время опубликованные работы не раскрывают в полном объёме физической сущности процесса охлаждения хлебобулочных изделий. Поэтому целью данной работы является изучение влияния граничных условий на тепло- и массообменные процессы в свежевыпеченном хлебе во время его охлаждения[8]. Для этого впервые представлена математическая модель, принимающая во внимание эти явления. И на основе модели разработана вычислительная система, позволяющая предсказать потерю массы продукта и температуру в различных точках во время процесса охлаждения.

Вычисленные при помощи математической модели значения были сопоставлены с экспериментальными данными изменения температуры и массы во времени. Модель показала хорошие результаты сходимости и теперь используется для оценки степени влияния явлений, происходящих на поверхности буханки (конвекции, лучистого теплообмена и испарения) на интенсивность тепло и масс обмена, во время процесса охлаждения хлебобулочных изделий.

При создании двухмерной математической модели рассматривалась четверть буханки хлеба, представляющая собой параллелепипед размерами $0.1 \times 0.1 \times 0.3$ м (Рис.1).

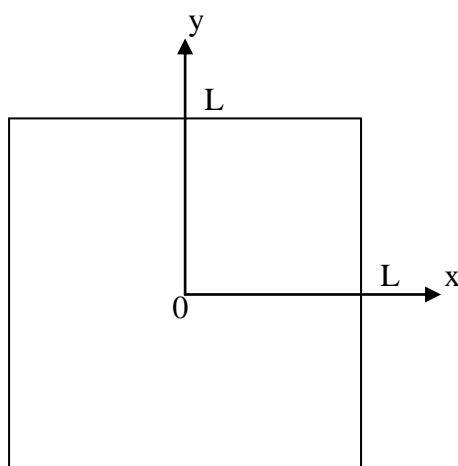


Рис 1. Сечение хлеба, $L = 0.05$ м

Моделирование основывается на втором законе Фурье для теплопередачи и на законе Фика для массопередачи. Уравнение тепловой диффузии (1):

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho_b c_{p_b}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \frac{H_{lg} \rho_d}{\rho_b c_{p_b}} \frac{\partial W}{\partial t} \quad \text{если } T_s > T_{centre} \quad (1)$$

и

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho_b c_{p_b}} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad \text{если } T_s < T_{centre} \quad , \quad (2)$$

где

λ - теплопроводность хлеба, $\frac{Вт}{м \cdot К}$

ρ_b - плотность хлеба, $\frac{кг}{м^3}$

c_{p_b} - удельная теплоёмкость хлеба, $\frac{Дж}{кг \cdot К}$

W - местное влагосодержание, $\frac{кг \text{ влаги}}{кг \text{ сухого в-ва}}$

H - относительная влажность воздуха, %

T_s - температура поверхности буханки

T_{centre} - температура в центре буханки

Массоперенос рассматривается как изменение содержания воды в продукте. Уравнение массопереноса (3):

$$\frac{\partial W}{\partial t} = D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

где

$D(W)$ - коэффициент массовой диффузии, $\frac{м^2}{с}$

С учётом граничных условий между поверхностью буханки и омывающем продукт воздухом уравнения (2) и (3) запишутся в виде уравнений (4) и (5):

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=L} = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=L} = \alpha (T_s - T_{air}) + \varepsilon \sigma (T_s^4 - T_{air}^4) + \beta H_{lg} \rho_d (p_s - p_{ext}) \quad (4)$$

$$-D \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right)_{x=L} = -D \left(\frac{\partial W}{\partial y} \right)_{y=L} = \beta (p_s - p_{ext}) \quad (5)$$

где

α - коэффициент теплоотдачи поверхности хлеба омываемому воздуху, $\frac{Вт}{м^2 \cdot К}$

ε - коэффициент черноты поверхности хлеба

σ - постоянная Стефана-Больцмана, равная $5,668 \cdot 10^{-8} \frac{Вт}{м^2 \cdot К^4}$

T_{air} - температура омывающего продукт воздуха, К

β - коэффициент массотдачи поверхности хлеба окружающему воздуху, м/с

p_s, p_{ext} - парциальные давления на поверхности и вблизи поверхности буханки соответственно, Па

Решение этих уравнений в среде Matlab и QBasic на основе граничных и начальных условий полученных в результате натуральных экспериментов позволило получить математическую модель процесса конвективного охлаждения хлеба и скомпилировать вычислительную систему, позволяющая предсказать потерю массы продукта и температуру в различных точках во время процесса охлаждения[9], [10],[11].

Начальные условия касаются в основном распределения температуры в буханке в конце выпечки. При создании математической модели использовались экспериментальные значения распределения температуры.

Остывание и потеря хлебом массы (усушка) протекают одновременно. Температура корки хлеба в момент выхода из печи достигает на поверхности 180°C , на границе с мякишем — около 100°C . Влажность корки в этот момент близка к нулю. Температура мякиша $97-98^\circ\text{C}$, а его влажность на $1...2\%$ превышает исходную влажность теста [12]. Температура остывающего вышедшего из печи хлеба является фактором, обуславливающим испарение влаги с поверхности хлеба и перемещение влаги внутри хлеба. Поэтому принято полагать, что испарение, является наиболее важным фактором, который определяет скорость усыхания хлеба[13]. При моделировании ставилась задача утвердить или опровергнуть это положение. Для этого были определены основные начальные и граничные условия. Начальная температура хлеба постоянна и равна T_0 , за исключением участков близких к поверхности буханки (1 см корочки), где температура линейно снижается от T_{s0} до T_0 . Местное влагосодержание линейно изменяется от W_{max} в центре мякиша до W_0 в подкорковом слое на глубине 1см, а затем от W_0 до W_{min} на поверхности. Граничные условия заданы в уравнениях (6), (7), (8) и (9).

$$T = T_0 \quad \text{если } 0 \leq x \leq L - 0.01 \text{ и } 0 \leq y \leq L - 0.01 \quad (6)$$

$$T = \frac{T_{s0} - T_0}{0.01} \cdot \text{Max}(x, y) + T_0 \quad \text{если } L - 0.01 \leq x \leq L \text{ и } L - 0.01 \leq y \leq L \quad (7)$$

$$W = \frac{W_0 - W_{max}}{L - 0.01} \cdot \text{Max}(x, y) + W_{max} \quad \text{если } 0 \leq x \leq L - 0.01 \text{ и } 0 \leq y \leq L - 0.01 \quad (8)$$

$$W = \frac{W_{min} - W_0}{0.01} \cdot \text{Max}(x, y) + W_0 \quad \text{если } L - 0.01 \leq x \leq L \text{ и } L - 0.01 \leq y \leq L \quad (9)$$

Начальные условия представлены в таблице 1.

Таблица 1.

Параметр	T_0	T_{s0}	W_0	W_{max}	W_{min}
Значение	372 К	415 К	0.7	0.78	0.1

Коэффициенты тепло и массотдачи рассчитаны по зависимостям представленным Озишиком [14], а также Кютче и Доденом [15].

$$Nu=0.664Re^{\frac{1}{2}}Pr^{\frac{1}{3}} \quad (10)$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = c_{p_{air}} \frac{M_{air}}{M_w} p_{ext} Le^{\frac{2}{3}} m, \quad (11)$$

где

$c_{p_{air}}$ - теплоёмкость воздуха, $\frac{Дж}{кг \cdot К}$

M_{air} - молярная масса воздуха, $0.029 \frac{кг}{моль}$

M_w - молярная масса воды, $0.018 \frac{кг}{моль}$

Re , Pr и Le находятся из их определений с учётом физических свойств воздуха и массовой диффузии парожидкостной системы. Для моделирования была применена явная схема с сеткой по координатам X и Y содержащей 20 точек, шаг по времени 30 секунд.

Экспериментальные исследования проводились на хлебе, который был изготовлен в лаборатории и охлаждался после выпечки, путём либо естественной, либо принудительной конвекции.

Показания изменения температуры и относительной влажности воздуха во время фазы охлаждения снимались и обрабатывались системой сбора данных DataLog 20 (AOIP, Рис Orangis, Франция), К-термопарами, а также регистратором данных Hygrolog (Rotronic, Bassersdorf, Швейцария).

Процесс охлаждения путём естественной конвекции проводился в помещении, в котором измерялись температура и относительная влажность воздуха. Во время проведения экспериментов регистрировались изменение температуры в центре буханки и потеря массы, которая определялась путем вычисления разницы масс буханки до и после охлаждения.

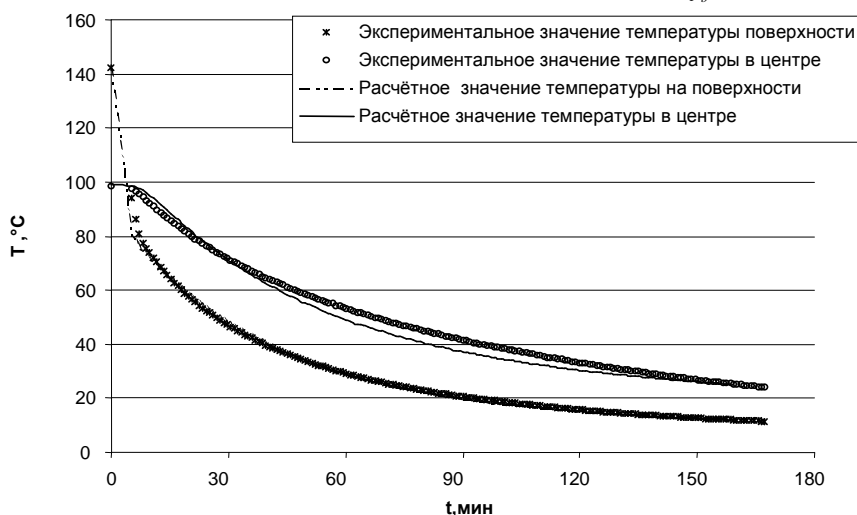
Охлаждения с принудительной циркуляцией воздуха проводилось в климатической камере Votsch VC 7018 (Votsch -Lindenstrath, Германия). Эта камера оснащена контролерами температуры и относительной влажности. Скорость воздуха измерялась с помощью анемометра VelociCalc 8355 (TSI, MN, США), и колебалась в пределах 1.5-2.5 м/с.

Во время процесса охлаждения хлеба, происходит изменение температуры по всему продукту. Также, в зонах, прилегающих к корке, изменяется местное влагосодержание, что сопровождается испарением влаги с поверхности буханки. Изменение влагосодержания вызывает повышение пористости продукта. Соответственно все эти аспекты (состав, переменная пористости, явление испарения-конденсации, влажность и температура) должны быть приняты во внимание при создании физической модели. В то время что выпеченной буханке, пористость полностью определяется местным влагосодержанием т.к. твердый «скелет» считается постоянным и однородным по всему продукту за время охлаждения. Иными словами, состояние хлеба во время охлаждения полностью определяется температурой и местным влагосодержанием.

Время охлаждения определяется временем необходимым для достижения 30 °С в центре буханки.

На Рис. 2 представлены графики экспериментальных и вычисленных значений изменения температуры в центре мякиша и на поверхности буханки во время охлаждения изделия.

Видно, что экспериментальные и расчётные графики изменения температуры на поверхности буханки близки друг к другу и почти одинаковы. В тоже время, графики температуры в центре мякиша отличаются друг от друга. Это указывает на недостаток в точности определения тепловой диффузии в модели $\frac{\alpha(T)}{\rho_b c_{pb}(T)}$.



.Рис.2. Сравнение экспериментальных и вычисленных значений изменения температур на поверхности буханки и в центре мякиша во время охлаждения при температуре 5 °С

Для определения количественного расхождения модели с экспериментальными данными используется среднеквадратичное отклонение между измеренными и вычисленными значениями изменения температуры во время охлаждения.

$$m = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (T_{\text{exp}} - T_{\text{cal}})^2} = 2.46 ,$$

где

T_{exp} , T_{cal} - экспериментальные и вычисленные значения температур соответственно.

N – число точек измерения.

Для количественной оценки важности каждого из трёх видов теплообмена имеющих место на поверхности буханки были смоделированы три ситуации с различными граничными условиями: все три вида теплообмена, без излучения, без испарения. Результаты представлены в таблице 2.

Из таблицы видно, что испарение не оказывает значительный эффект на продолжительность испарения, а излучение, наоборот, играет очень важную роль. Так, например, удаление лучистой составляющей из уравнения приводит к увеличению времени охлаждения на 24 %.

Таблица 2.

Температура охлаждения	Конвекция, излучение и испарение	Конвекция и испарение	Конвекция и радиация
5 °С	5294 с	6548 с	5315 с

Таким образом, разработанная модель показала хорошее согласование расчётных значений с экспериментальными данными. Дальнейшее развитие модели будет заключаться в уточнении теплофизических параметров, таких как теплопроводность и тепловая диффузия.

Список литературы

1. Пастухов А.С. Способы охлаждения хлебобулочных изделий перед нарезкой и упаковкой. Сборник трудов молодых учёных, СПбГУНиПТ.– СПб, 2005.с.60-61
2. deVries, U., Sluimer, P. and Bloksma, A.H., A quantitative model for heat transport in dough and crumb during baking, Proceedings of Cereal Science and Technology in Sweden, Ystad, June 13th-16th, Lund University, 1988, p. 174-188
3. Zaroni, B. and Peri, C., A study of the bread-baking process. I: a phenomenological model, Journal of Food Engineering, Vol. 19, No. 4, pp. 389-398, 1993
4. Zaroni, B., Pierrucci, S. and Peri, C., Study of the Bread Baking Process - II. Mathematical Modelling, Journal of Food Engineering, Vol. 23, pp. 321-336, 1994

5. Sablani, S.S., Marcotte, M., Baik, O.D. and Castaigne, F., Modeling of simultaneous heat and water transport in the baking process, *Lebensm.-Wiss. u.-Technol.*, Vol. 31, pp. 201-209, 1998
6. Пастухов А.С., Данин В.Б. Общие сведения об охлаждении хлеба. *Известия СПбГУНиПТ* №1 2007. – СПб, 2007. с. 37-41
7. van der Sluis, S.M., Cooling and freezing simulation of bakery products, *Proceedings of IIR Meeting Comm. B1, B2, D1, D2/3*, Palmerston North, November, 1993
8. Пастухов А.С., Данин В.Б. Процесс конвективного охлаждения хлебобулочных изделий как объект исследования. *Известия СПбГУНиПТ* №2 2008. – СПб, 2008. с.17-18
9. Пастухов А.С., Niranjana K. Модернизация конвейерной системы охлаждения хлебобулочных изделий на основе результатов математического моделирования оптимизации параметров процесса конвективного охлаждения. Материалы международной научно-практической конференции «XXXIX неделя науки СПбГПУ» часть V, физико-механический факультет, Санкт-Петербург, Издательство Политехнического университета, 2010
10. Дьяконов В.П., MATLAB 6.5 SP1/7/7 SP1+Simulink 5/6. Работа с изображениями и видеопотоками. – М.: СОЛОН-Пресс, 2010. – 400 с.
11. Пестриков В.М., Тяжев А.Т., QBASIC на примерах. БХВ-Петербург, 2010.- 304с.
12. Пастухов А.С., Данин В.Б. Современные методы борьбы с усушкой хлебобулочных изделий. *Известия СПбГУНиПТ* №1 2006. – СПб, 2006. с. 88-90
13. Данин В.Б., Пастухов А.С. Механизм естественного усыхания хлебобулочных изделий. Борьба с потерей массы продукта. [Электронный ресурс]: Электронный научный журнал «Процессы и аппараты пищевых производств»/ГОУ ВПО «Санкт-Петербургский государственный университет низкотемпературных и пищевых технологий. — Электрон.журнал — Санкт-Петербург: СПбГУНиПТ, 2009. — №1.— март. 2009
14. Özişik, M.N., Heat transfer - A basic approach, McGRAW-HILL INTERNATIONAL EDITIONS ed, Mechanical Engineering Series, Singapore, 1985
15. Kuitche, A. and Daudin, J.D., Modelling of temperature and weight loss kinetics during meat chilling for time-variable conditions using an analytical-based method - I. The model and its sensitivity to certain parameters, *Journal of Food Engineering*, Vol. 28, pp. 55-84, 1996