

УДК 517.956.4+536.24

УЧЕТ ФОРМЫ ХЛЕБОБУЛОЧНЫХ ИЗДЕЛИЙ В ЗАДАЧАХ ТЕПЛООБМЕНА

Сергеев А.А., Косачев В.С., Кошевой Е.П.
ep-koshevoi@mail.ru

Кубанский государственный технологический
университет, г. Краснодар, Россия

При анализе работы линии хлебозавода при выпуске многоассортиментной продукции установлено, что критическими, оказывающими влияние на производительность работы линии, являются операции выпечки и охлаждения хлебобулочных изделий, отличающихся различной формой. Для определения путей интенсификации процессов необходимо построить математическую модель теплообмена в телах различной формы. В моделировании процесса теплообмена, определение соответствующей физической модели необходимо как условие адекватного описания теплопереноса в теле.

Ключевые слова: теплопроводность; неправильная форма; математическая модель

THE ACCOUNT OF THE FORM OF BAKERY PRODUCTS IN HEAT EXCHANGE PROBLEMS

Sergeev A.A., Kosachev V. S, Koshevoi E.P.

ep-koshevoi@mail.ru

The Kuban state technological university

At the analysis of work of a line of a bakery at release polyassortment production it is established, that critical, influencing productivity of work of a line, are operations of a batch and cooling of the bakery products, differing the various form. For definition of ways of an intensification of processes it is necessary to construct mathematical model of heat exchange in bodies of the various form. In modelling of process of heat exchange, definition of corresponding physical model is necessary as a condition of the adequate description heatconduct in a body.

Keywords: heatconduct; the wrong form; mathematical model

Работа современного хлебозавода характеризуется выпуском многоассортиментной продукции и анализ [1] показал, что критическими операциями, определяющими производительность линии, являются операции выпечки и охлаждения хлебобулочных изделий, отличающихся различной формой. Аналитические решения вышеупомянутой проблемы возможны для тел правильной формы типа пластины, цилиндра и сферы [2]. Фактически

хлебные изделия в общем случае напоминают либо эллипсоидальные конфигурации, либо представляют собой тела сложной формы, которую отчасти можно представить в виде комбинации простых тел на основе операций объединения, пересечения или вычитания этих исходных графических примитивов. Геометрические размеры большинства хлебобулочных изделий определяются по их габаритам: главным (а), средним (b), и малым (с) осям. Таким образом, их геометрия может быть приближена к трехосному эллипсоиду, потому что геометрический объем эллипсоидальной модели наиболее близок к их объему. Известно [3], что хорошая физическая модель близкая к фактической геометрии реального тела более точно может моделировать явления переноса (например, температурные профили) в соответствующем теле. Прямое решение задачи теплопереноса в теле неправильной формы на основе метода конечных элементов, как правило, не позволяет учесть особенности, возникающие на движущихся фазовых границах внутри моделируемого объема, а также использование сложных граничных условий на поверхности этих тел.

При этом использование метода конечных разностей или метода конечных элементов [4] дает удовлетворительные результаты при большом объеме вычислений и в ряде случаев требует ручного разбиения тела на составляющие элементы. Следовательно, моделирование процессов переноса на основе простой одномерной математической модели актуально.

Задача типа нестационарной теплопроводности широко применяется для решения различных практических задач с телами различной формы на основе принципа суперпозиций [5]. Другим подходом является применение различных коэффициентов формы, являющихся поправочными, к уравнениям, полученным для тел классической формы (пластины, цилиндра и шара):

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\alpha}{y} \cdot \Gamma \cdot \frac{\partial \theta}{\partial y} + \alpha \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) \right] \quad (1)$$

где α - коэффициент температуропроводности; y – нормаль, по которой распространяется тепло; θ - относительная температура; Γ – коэффициент, учитывающий форму тела.

Данное уравнение справедливо для одномерных температурных полей: $\Gamma = 0$ (для пластины), $\Gamma = 1$ (для цилиндра), $\Gamma = 2$ (для шара). Средняя объемная температура, необходимая для расчета расхода тепла, определяется формулой:

$$\bar{T} \leftarrow \rightleftharpoons \frac{\Gamma + 1}{R^{\Gamma+1}} \cdot \int_0^R y^{\Gamma} \cdot \theta \leftarrow \rightleftharpoons \tau \leftarrow \rightleftharpoons dy \quad (2)$$

Уравнения (1) и (2) справедливы в том случае, если параметр Γ является целочисленной величиной. Это связано с параметром R , который для одномерных температурных полей представляет собой максимальную длину нормали, по которой распространяется тепло. Для тел сложной конфигурации параметр может принимать дробные значения в уравнении (

1), что соответствует описанию теплопереноса в трехмерных температурных полях, когда R различно по каждой ортогональной координате многомерного температурного поля. В этом случае найдено, что параметр Γ может быть представлен следующей зависимостью:

$$\Gamma(a, b, c) = \frac{3 \cdot a}{a + b + c} + \frac{2 \cdot a}{a + b} \quad (3)$$

где a, b, c - полудлины тела по каждой из осей в декартовой системе координат, причем, $a > b > c$

Представленная зависимость (3) устраняет недостаток представления ранее указанного коэффициента формы Γ , имеющего дискретный характер, для одномерных тел классической формы. Зависимость (3) в предельных случаях совпадает с коэффициентами для тел классической формы.

Рассмотрим решение задачи нестационарного теплопереноса (1) с граничными условиями первого рода для трехмерных эллипсоидов с использованием неявной разностной схемы [6].

Для внутренних точек эллипсоида уравнение (1) может быть представлено разностной схемой следующего вида:

$$\begin{aligned} \theta_{i,j} = & \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha \cdot \Gamma(a, b, c) \cdot \Delta\tau - 2 \cdot \alpha \cdot \Delta\tau \cdot i}{\Delta h^2 \cdot i} \cdot \theta_{i-1,j+1} + \\ & + \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \Delta h^2 \cdot i + 4 \cdot \alpha \cdot \Delta\tau \cdot i}{\Delta h^2 \cdot i} \cdot \theta_{i,j+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha \cdot \Gamma(a, b, c) \cdot \Delta\tau - 2 \cdot \alpha \cdot \Delta\tau \cdot i}{\Delta h^2 \cdot i} \cdot \theta_{i+1,j+1} \end{aligned} \quad (4)$$

Для центральной точки, исходя из условия симметрии эллипсоида уравнение (1) может быть представлено разностной схемой следующего вида:

$$\theta_{0,j} = \frac{\Delta h^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \Delta\tau}{\Delta h^2} \cdot \theta_{0,j+1} - 2 \cdot \frac{\alpha \cdot \Delta\tau}{\Delta h^2} \cdot \theta_{1,j+1} \quad (5)$$

Для граничных точек на поверхности эллипсоида, ($\theta_{\text{MaxNum},j} = 0$) исходя из граничного условия первого рода уравнение (1) может быть представлено разностной схемой следующего вида:

$$\begin{aligned} \theta_{\text{MaxNum},j} = & \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta h^2 \cdot \text{MaxNum} - 2 \cdot \Delta h^2 + 4 \cdot \alpha \cdot \Delta\tau \cdot \text{MaxNum} - 4 \cdot \alpha \cdot \Delta\tau}{\Delta h^2 \cdot (\text{MaxNum} - 1)} \cdot \theta_{\text{MaxNum}-1,j+1} + \\ & \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot \alpha \cdot \Delta\tau \cdot \text{MaxNum} + 2 \cdot \alpha \cdot \Delta\tau + \alpha \cdot \Gamma(a, b, c) \cdot \Delta\tau}{\Delta h^2 \cdot (\text{MaxNum} - 1)} \cdot \theta_{\text{MaxNum}-2,j+1} \end{aligned} \quad (6)$$

где MaxNum - число узлов сеточной аппроксимации.

В результате получается трех диагональная матричная система алгебраических уравнений, разрешаемая относительно неизвестных $\theta_{i,j}$ методом прогонки.

Схема решения была реализована для следующих эллипсоидальных тел из условий постоянства объема и приведенного размера $r = \sqrt[3]{a \cdot b \cdot c} = 1$, представленных в таблице.

Таблица. Исходные данные по размерам частиц неправильной формы.

№ п/п	a	b	c	Г
1-й	3.95949	1.05947	0.23838	3.83722
2-й	2.07728	2.07728	0.23174	2.42075
3-й	8.08650	0.35166	0.35166	4.67660
4-й	7.34545	0.47634	0.28580	4.59619

На рисунке представлены результаты расчетов и для получения средних значений целесообразным является представление уравнения теплопроводности для частиц неправильной формы эквивалентным одномерным уравнением, использующим геометрию изопотенциальных поверхностей трехмерного температурного поля:

$$V'_n \left(\frac{\partial T}{\partial \tau} \right) = a_i \cdot \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ S \left(\frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \right\} \quad (7)$$

где $S(\xi)$ - семейство изопотенциальных поверхностей; $V'_n(\xi)$ соответствующие этому семейству производной объемов.

Если принять следующие соотношения, которые зависят от одной обобщенной переменной ξ , и, учитывая эквивалентность уравнения (1) и (4):

$$\begin{aligned} y^r &\cong S(\xi) \\ \frac{1}{y^r} &\cong \frac{1}{V'_n(\xi)} \end{aligned} \quad (8)$$

то это позволяет усреднить температурное поле в теле сложной конфигурации.

Для усреднения нестационарного температурного поля каждого из эллипсоидов в таблице использовалась формула сеточного усреднения:

$$\bar{T}_j = \sum_{i=0}^{MaxNum} \left[\frac{dV \cdot \Delta h \cdot i}{V \cdot \Delta h \cdot MaxNum} \cdot \Delta h \cdot T_{i,j} \right] \quad (9)$$

где $dV = \frac{d}{d\xi} V$.

Как видно из графика особенности теплопереноса в эллипсоидальных телах можно учесть, если известны объемы изопотенциальных поверхностей внутри этих тел. Представленный график показывает хорошее совпадение одномерного решения (сплошные линии) и трехмерного численного решения (точки), однако, объем вычислений существенно меньше для одномерной задачи.

ВЫВОДЫ:

Показана возможность корректного понижения размерности при решении задач трехмерной нестационарной теплопроводности с использованием информации о геометрии габаритных размеров эллипсоидальных тел и факторе формы (Γ), зависящего от соотношения этих размеров. Представленная схема решения позволяет существенно сократить объем вычислений при реализации сеточной схемы без существенной потери

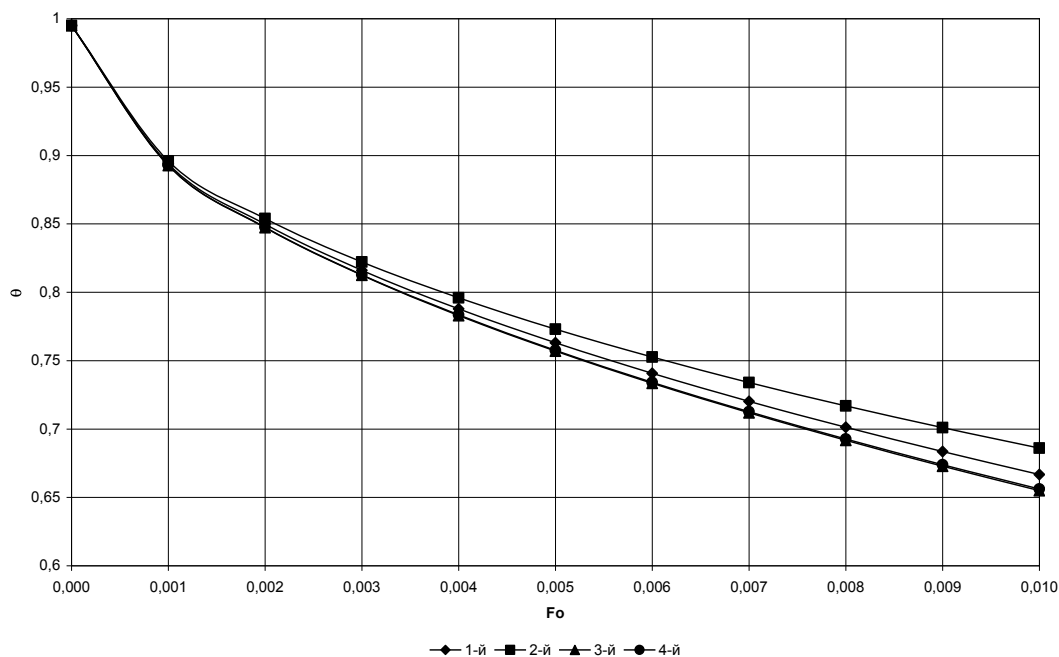


Рис. Зависимости изменения средней относительной избыточной температуры для частиц неправильной формы (см. таблицу). Сплошные линии – результаты расчета предложенной одномерной сеткой, а точки – результаты расчета по трехмерной сетке.

Список литературы

1. Косачев В.С., Кошевой Е.П., Сергеев А.А. Оптимизация технологического потока многоассортиментного производства хлебных изделий. [Электронный ресурс]. Электронный научный журнал «Процессы и аппараты пищевых производств»./ГОУ ВПО СПбГУНиПТ - СПб:СПбГУНиПТ, вып. №1 март 2011. Режим доступа к журналу <http://www.open-mechanics.com/journals> свободный.
2. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М., -Высшая школа. 1967. –566 с.
3. Li Z., Ye J., Kobayashi N., Hasatani M. Modeling of Diffusion in Ellipsoidal Solids: A Simplified Approach to Solving Some Drying Problems. 16th International Congress of Chemical and Process Engineering 22-26 August 2004. Prague, Czech Republic.
4. Самарский А.А. Введение в численные методы.- М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. -1982.-272 с.
5. Пехович А.И. и Жидких В.М. Расчеты теплового режима твердых тел. «Энергия» Л., -1968. -304 с.
6. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. – М.: Наука, -1974.