УДК 664.03

# Аналитическое решение уравнений теплопроводности для абразивной обработки пищевого сырья

*Д-р техн. наук* **Г. В. АЛЕКСЕЕВ, Б. А. ВОРОНЕНКО, В. А. ГОЛОВАЦКИЙ**
gva54@mail.ru
*Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет ИТМО*
*Институт холода и биотехнологий*
*191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9*

***В работе приводится математическое описание теплового процесса при первичной обработке пищевого сырья на стадии очистки. Полученное аналитическое решение может быть предложено для инженерных расчетов процесса теплового воздействия на пищевое сырье при его переработке.***
***Ключевые слова:*** аналитическое решение, уравнение теплопроводности, пищевое сырье, стадия очистки.

---

# Analytical decision of the equations heat-conducting for abrasive processing food cheese

**G. V. ALEKSEEV, B. A. VORONENKO, V. A. GOLOVATSKY**
*National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics*
*Institute of Refrigeration and Biotechnologies*
*191002, St. Petersburg, Lomonosov str., 9*

***The paper presents a mathematical description of the thermal process in primary treatment of food raw material in the purification step. The resulting analytical solution can be offered for engineering calculations, process heat influence on food raw material for reprocessing.***
***Keywords:*** analytical solution, heat equation, food raw materials, purification step.

---

В ряде работ [1, 2] авторами показано, что обрабатываемые на стадии очистки пищевые материалы (картофель, крупа, зерно) подвергаются значительным температурным воздействиям, влияющим на качество конечного продукта и производительность аппаратов. Однако многие тепловые процессы при первичной обработке сырья не изучены.

В значительной части оборудования, применяемого в пищевой промышленности, используется абразивный метод воздействия на объект. При этом предполагается непрерывность контакта рабочих органов с материалом. Актуальной является проблема получения и аналитического исследования математических моделей, описывающих влияние термических процессов на пищевое сырье на указанном этапе его обработки.

Тепловой эффект при снятии кожуры овощей или оболочки зерновых может быть описан следующим образом при рассмотрении непрерывного контакта обрабатываемого продукта с абразивом при вращении продукта или абразива.

Клубень картофеля (или зерно) можно представить в виде тела основной геометрической формы – шара, состоящего из двух сферических тел: кольца оболочки (кожуры) и внутреннего шара (собственно ядра объекта) (см. рис.)

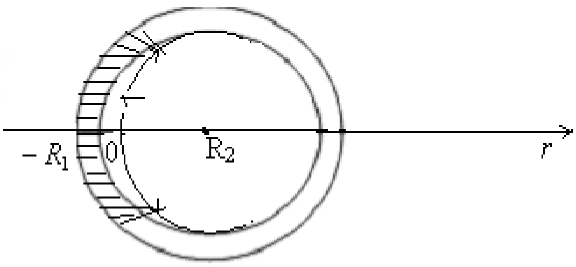


*Рис.* $OR_2 = R_2$ *– радиус внутреннего шара;* $R_2R_1$ *– радиус внешнего шара*

Теплофизические свойства этих двух составных тел различны.

Клубень вращается со скоростью $v = \dfrac{2\pi(R_1 - R_2)}{T}$, где $R_1$=$OR_1$ – толщина оболочки, $T$- период вращения. Вследствие трения абразива о картофель (зерно) температура наружной поверхности тела – составного шара - изменяется по экспериментально найденному закону

$$t_1(-R_1, \tau) = t_2 - (t_2 - t_1)\exp(-k\tau). \qquad (1)$$

Очевидно, что для достаточно продолжительного времени обработки пищевого продукта температура поверхности, а, следовательно, и всего тела не может превысить максимального значения $t_2$.

Так как толщина оболочки значительно меньше радиуса шара (картофеля, зерна), т.е. $OR_1 = R_1 << OR_2 = R_2$ (длина полоски кольца $l >> R_1$), то для описания температурного поля оболочки можно использовать уравнение теплопроводности для неограниченной пластины. Кроме того, принимаем в первом приближении следующее допущение: толщину оболочки считаем неизменной. Таким образом, математически задачу нагрева вращающегося сферического тела можно сформулировать следующим образом: требуется решить систему дифференциальных уравнений теплопроводности

$$\frac{\partial t_1(r,\tau)}{\partial \tau} = a_1 \frac{\partial^2 t_1(r,\tau)}{\partial r^2} - \upsilon \frac{\partial t_1}{\partial r}, \qquad (2)$$

$$(\tau > 0, \quad -R_1 < r < 0);$$

$$\frac{\partial t_2(r,\tau)}{\partial \tau} = a_2\left(\frac{\partial^2 t_2(r,\tau)}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial t_2(r,\tau)}{\partial r}\right) \tag{3}$$

$$(\tau > 0, \quad 0 < r < R_2);$$

при начальном условии

$$t_1(r,0) = t_2(r,0) = t_1, \tag{4}$$

граничном условии первого рода (1) на внешней границе составного шара, граничном условии четвертого рода (равенстве температур и тепловых потоков) на границе оболочки и ядра

$$t_1(0,\tau) = t_2(0,\tau); \tag{5}$$

$$-\lambda_1 \frac{\partial t_1(0,\tau)}{\partial r} = -\lambda_2 \frac{\partial t_2(0,\tau)}{\partial r}, \tag{6}$$

условии симметрии

$$\frac{\partial t_2(R_2,\tau)}{\partial r} = 0 \tag{7}$$

и физической ограниченности температуры в центре шара

$$t_2(R_2,\tau) < \infty \tag{8}$$

Аналитическое решение краевой задачи (1) – (8) методом обратного интегрального преобразования Лапласа позволило получить распределение полей температур в составном шаре в следующем безразмерном виде:

$$T_1(X,Fo) = \frac{t_1(r,\tau) - t_1}{t_2 - t_1} = 1 - \frac{\phi(Pd)}{\varphi(Pd)}\exp\left(\frac{Pe}{2}(1+X) - PdFo\right) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_{n1}}{\varphi_n}\exp\left(\frac{Pe}{2}(1+X) - (\mu_n^2 + \left(\frac{Pe}{2}\right)^2 Fo\right); \tag{9}$$

$$T_2(X,Fo) = \frac{t_2(r,\tau) - t_1}{t_2 - t_1} = 1 - \frac{\sqrt{\left(\frac{Pe}{2}\right)^2 - Pd}\ \sin(\sqrt{k_a Pd}\,X)}{\sqrt{k_a Pd}\,X\varphi(Pd)}$$

$$\exp\left(\frac{Pe}{2} - PdFo\right) + \frac{Pd}{\sqrt{k_a}X}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_{n2}\sin(\sqrt{k_a}(\mu_n^2 + (\frac{Pe}{2})^2)X)}{\varphi_n}\exp\left(\frac{Pe}{2} - (\mu_n^2 + \left(\frac{Pe}{2}\right)^2 Fo\right), \tag{10}$$

где

$\mu_n$ - последовательные положительные корни характеристического уравнения

$$tq\mu = -\frac{\mu}{\frac{1}{2}Pe}; \qquad (n\pi < \mu_n < (2n+1)\frac{\pi}{2}); \tag{11}$$

$$\phi(Pd) = \sqrt{\left(\frac{Pe}{2}\right)^2 - Pd}\ ch\left(\sqrt{\left(\frac{Pe}{2}\right)^2 - Pd}\ X\right) - \frac{Pe}{2}sh\left(\sqrt{\left(\frac{Pe}{2}\right)^2 - Pd}\,X\right);$$

$$\varphi(Pd)=\sqrt{\left(\frac{Pe}{2}\right)^2-Pd}\,ch\left(\sqrt{\left(\frac{Pe}{2}\right)^2-Pd}\right)+\frac{Pe}{2}sh\left(\sqrt{\left(\frac{Pe}{2}\right)^2-Pd}\right);$$

$$A_{n1}=\frac{2\mu_n Pd}{\cos\mu_n}(\mu_n\cos(\mu_n X)-\frac{Pe}{2}\sin(\mu_n X);$$

$$A_{n2}=\frac{2\mu_n{}^2 Pd}{\cos\mu_n};$$

$$\varphi_n=\left(\mu_n{}^2+\left(\frac{Pe}{2}\right)^2\right)(Pd-(\mu_n{}^2+\left(\frac{Pe}{2}\right)^2)(1+\frac{2}{Pe}(\mu_n{}^2+\left(\frac{Pe}{2}\right)^2));$$

Проведенный численный эксперимент показал адекватность решений (9) и (10) реальным процессам.

Разработанная математическая модель в виде аналитического решения соответствующей краевой задачи теплопроводности дает возможность прогнозировать и управлять температурным полем тела сферической формы (клубня картофеля, зерна, крупы), предотвращая перегрев продукта, и тем самым влиять на его качество.

Полученное решение позволяет решить обратную задачу по нахождению времени, необходимого для достижения нужной температуры в любой точке обрабатываемого пищевого материала.

## Обозначения

$t_1(r,\tau)-$ температура оболочки тела, $^0C, K$;

$(t_2(r,\tau)-$температура ядра тела $^0C, K$;

$t_1=t_{\min}=const-$ минимальная температура, равная начальной температуре тела;

$t_2=t_{\max}=const-$ наибольшая допустимая температура тела;

$r-$ текущая координата (по диаметру) обрабатываемого тела, м;

$\tau-$ время*, с;*

$k-$положительная постоянная, зависящая от скорости вращения исследуемого тела, 1/с;

$a_1$ и $a_2$ - коэффициенты температуропроводности оболочки и ядра соответственно, м$^2$/с;

$\lambda_1$ и $\lambda_2$- коэффициенты теплопроводности, вт/(мК);

$Pe=\dfrac{\nu R_1}{a_1}-$ число Пекле;

$Pd=\dfrac{kR_1{}^2}{a_1}-$число Предводителева;

$Fo = \dfrac{a_1 \tau}{R_1^{\;2}}$ – число Фурье;

$X = \dfrac{r}{R_1}$ – безразмерная координата;

$k_a = \dfrac{a_1}{a_2}$.

## Список литературы


1. *Алексеев Г. В.,Головацкий В. А. и др.* Патент на изобретение № 2228795 от 20.05.2004. Устройство для измельчения пищевого сырья.
2. *Головацкий В. А.* Совершенствование процессов и аппаратов для переработки пищевого сырья. -СПб.: НИЭУиД, 2008.-123с.