

УДК 664.03+664.08

## **Особенности течения тонких пленок жидкости в условиях проскальзывания на обтекаемой поверхности**

**В. В. ПЕЛЕНКО, В. А. АРЕТ, К. Э. ДАЙНЕКО, Е. И. ВЕРБОЛОЗ,  
В. П. ИВАНЕНКО, Ф. В. ПЕЛЕНКО, А. Г. КРЫСИН**

[valdurtera@rambler.ru](mailto:valdurtera@rambler.ru)

*Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет ИТМО  
Институт холода и биотехнологий  
191002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9*

*Решена задача определения зависимости толщины слоя вязкой жидкости на поверхности вертикальной пластины и скорости стекания жидкости при наличии сил поверхностного натяжения, инерционных сил и явления проскальзывания.*

*Ключевые слова:* ламинарный режим, вязкость, пограничный слой.

---

## **Features of flow of thin-films of liquid in the conditions of slipping on the streamlined surface**

**V. V. PELENKO, W. A. ARET, K. E. DAYNEKO, E. I. VERBOLOZ,  
V. P. IVANENKO, F. V. PELENKO, A. G. KRYSIN**

*National Research University of Information Technologies, Mechanics and Optics  
Institute of Refrigeration and Biotechnologies  
191002, St. Petersburg, Lomonosov str., 9*

*Solved the task of determining the dependence of the thickness of a layer of a viscous liquid on the surface of a vertical plate and speed of flow of the liquid in the presence of surface tension forces, inertia forces and phenomena of slippage.*

*Keywords:* laminar mode of a current, viscosity, frontier layer.

---

В технологиях связанных с транспортировкой и переработкой пищевых продуктов особую роль играют гидродинамические процессы основой которых является движение жидкости в системах (мойка, осушка, транспортирование и т. д.). Кинетика этих процессов зависит от множества факторов и, в частности, от поверхностного натяжения и вязкости жидкости. Учет этих свойств особенно важен при течении тонких пленок в условиях проскальзывания на стенке.

На сегодняшний день экспериментально установлено три различных режима течения [1]:

1. Обычный режим вязкого течения жидкости с постоянной толщиной пленки и числах **Re** не превышающих  $20 \div 30$ ;
2. Волновой режим течения при **Re**  $> 30 \div 50$ , когда наряду с поступательным движением в жидкости возникает волновая компонента;
3. При **Re** примерно равном 1500 ламинарный режим течения переходит в турбулентный.

В нашем случае особенный интерес представляют системы пищевых материалов, в том числе высоковязких, с ламинарным режимом течения жидкостей по их поверхности в условиях проскальзывания на стенке [3, 4].

При квазиодномерном (в плане) характере движения жидкости в тонкой пленке (переменной толщиной  $h$ ) все производные в направлении поперек пленки (**ось Y**) велики по сравнению с производными вдоль поверхности обтекания (**ось X**) и уравнения математической модели процесса допускают определенные упрощения.

Уравнения Навье - Стокса в виде уравнений пограничного слоя запишутся, согласно работам [1,2], следующим образом:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + f, \quad (1)$$

где:  $f$  - объемная сила, отнесенная к единице плотности и направленная вдоль оси X;

$V_x, V_y$  - скорость движения жидкости вдоль оси X и Y соответственно,  $t$  - время,  $\rho$  - плотность,  $P$  - давление,  $\nu$  - кинематическая вязкость.

Второе уравнение пограничного слоя:

$$V_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right), \quad (2)$$

в условиях пренебрежения локальными компонентами высшего порядка малости упрощается до выражения:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

Уравнение неразрывности имеет вид:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (4)$$

На свободной поверхности жидкости  $y = h(x)$  выполняются соотношения:

$$P = P_\sigma;$$

$$V_y = 0;$$

$$\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0; \quad (5)$$

$$V_x = V_h; \quad (6)$$

$P_\sigma$ - давление, обусловленное силами поверхностного натяжения;

$V_h$  – продольная скорость жидкости на поверхности пленки  $y = h$ ;

$\mu = \nu g$  – динамическая вязкость;

$g$  – ускорение силы тяжести.

На поверхности твердого тела  $y = 0$  запишем соотношения, учитывающие явление проскальзывания [3] потока на стенке и отличные от классических, приведенных в работах [1,2], (отходим от гипотезы прилипания):

$$V_y = 0; \quad (7)$$

$$V_x = \phi V_h; \quad (8)$$

$$\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\sigma}{x} = \frac{\sigma}{l}. \quad (9)$$

где:  $0 \leq \phi \leq 1$  - коэффициент проскальзывания;

$\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения стекающей жидкости;

$l$  – длина пути обтекания (размер обтекаемой пластины вдоль оси X).

Выражение (7) принципиально отличается от классического [1 - 4] случая «прилипания» на стенке и характеризует особенности процесса течения вязких продуктов - наличие «проскальзывания». Ориентировочно, по данным работы [5], можно считать:  $0,35 \leq \phi \leq 0,65$ .

Для малой толщины пленки и кривизны обтекаемой поверхности можно записать [1]:

$$P_{\sigma} = - \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}.$$

Тогда:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + f \quad (10)$$

При этом необходимо иметь в виду, что координата поверхности пленки  $h$  связана с компонентами скоростей (для тонкой пленки) соотношением:

$$V_y = \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial h}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial h}{\partial t} + V_x \frac{\partial h}{\partial x} \approx \frac{\partial h}{\partial t} \quad (11)$$

Из уравнения неразрывности следует:

$$V_y = - \int \frac{\partial v_x}{\partial x} dy \quad (12)$$

Уравнение (10) принимает вид:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - \left( \int \frac{\partial v_x}{\partial x} dy \right) \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\sigma}{\rho} \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + f \quad (13)$$

С учетом уравнений (11) и (12), координата поверхности тонкой пленки  $h$  связана с  $V_x$  соотношением:

$$\frac{\partial h}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} \left( \int V_x dy \right) \quad (14)$$

Уравнение (13) для медленного стационарного движения пленки в поле сил тяжести примет вид [1]:

$$\nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + g = 0 \quad (15)$$

Интегрируя (15) при граничных условиях (6),(8) и (9) получим:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = - \frac{\rho g}{\mu} y + C_1. \quad (16)$$

$$\text{Из (6) следует: } C_1 = \frac{\rho g}{\mu} h. \quad (17)$$

$$\text{Из (9) получаем: } C_1 = \frac{\sigma}{\mu l}. \quad (18)$$

Из системы уравнений (17) – (18) можно оценить реальную величину  $h$  – толщину пленки:

$$h = \frac{\sigma}{\rho g l}. \quad (19)$$

В таком случае уравнение (16) принимает вид:

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} = - \frac{\rho g}{\mu} y + \frac{\sigma}{\mu l}. \quad (20)$$

Интегрируя (20), получим:

$$V_x = -\frac{\rho g y^2}{\mu} + \frac{\sigma}{\mu l} y + C_2. \quad (21)$$

С учетом граничного условия (6) имеем:

$$C_2 = V_h + \frac{\rho g h^2}{\mu} - \frac{\sigma h}{\mu l}. \quad (22)$$

Из условия (8) следует соотношение:

$$C_2 = \varphi V_h. \quad (23)$$

Решая уравнения (22) и (23) совместно, найдем оценочное значение величины  $\varphi$ :

$$\varphi = 1 + \frac{h}{\mu V_h} \left( \frac{\rho g h}{2} - \frac{\sigma}{l} \right). \quad (24)$$

С учетом (19) уравнение (24) может быть приведено к основным физико-механическим, кинематическим и реологическим характеристикам жидкости и обтекаемой поверхности:

$$\varphi = 1 - \frac{\sigma^2}{2\mu V_h \rho g l^2}. \quad (25)$$

Уравнение (21) с учетом (23) принимает вид:

$$V_x = -\frac{\rho g y^2}{\mu} + \frac{\sigma}{\mu l} y + \varphi V_h. \quad (26)$$

Из (25) следует соотношение:

$$V_h = \frac{\sigma^2}{2\mu(1-\varphi)\rho g l^2}, \quad (27)$$

С учетом (27) аналитическое выражение для скорости стекания вязкой пленочной жидкости по поверхности вертикальной пластины под действием силы тяжести с учетом сил поверхностного натяжения и явления проскальзывания на стенке запишется в следующей окончательной компактной форме:

$$V_x = -\frac{\rho g y^2}{\mu} + \frac{\sigma y}{\mu l} + \frac{\varphi \sigma^2}{2\mu(1-\varphi)\rho g l^2}. \quad (28)$$

Осуществим количественную оценку величин  $h$  (толщина пленки, стекающей по вертикальной поверхности пластины) и  $\varphi$  (коэффициент проскальзывания потока жидкости при обтекании вертикальной поверхности пластины) в соответствии с полученными соотношениями (19) и (25).

Для воды имеем следующие характеристики [6, 7]:

$$\sigma = 0,072 \text{ Н/м}; \quad \mu = 0,88 \cdot 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}; \quad (\text{для } T=25^{\circ}\text{C});$$

$$\sigma = 0,0686 \text{ Н/м}; \quad \mu = 0,586 \cdot 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}; \quad (\text{для } T=45^{\circ}\text{C});$$

$$\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3; \quad g = 9,81 \text{ м/с}^2;$$

$C_p = 1860 \text{ Дж/кг} \cdot \text{К}$  – удельная массовая теплоемкость воды при постоянном давлении;

Для случая стекания моечной жидкости с вертикально расположенного плода кураги длина обтекания « $l$ » может быть принята равной:  $l = 0,035 \text{ мм}$ ,

масса плода  $M = 16 \text{ граммов}$ , площадь поверхности  $S = 16 \text{ см}^2$ .

В таком случае получаем следующие величины:

$$h_{25} = 0,21 \text{ мм}; h_{45} = 0,20 \text{ мм}.$$

Масса механически удаленной влаги составляет при этом  $m = 3,2$  мг.

Как следует из расчетов, с повышением температуры моющей среды с  $25^{\circ}\text{C}$  до  $45^{\circ}\text{C}$  количество влаги на поверхности плода кураги уменьшается на **5%**, что дает существенную экономию тепловой энергии при досушивании продукта.

Вторым выводом из полученных результатов следует очевидная возможность использования разработанных уравнений (19) и (25) для экспериментального определения толщины стекающей пленки **h** и коэффициента  $\varphi$  проскальзывания жидкости на стенке.

$$\varphi_{25} = 1 - \frac{0,245}{v_h}; \quad \varphi_{45} = 1 - \frac{0,334}{v_h}.$$

Третий вывод, который следует из полученных результатов, состоит в возможности существенно интенсифицировать процесс механического съема поверхностной влаги с пищевых материалов после их мойки. Действительно, как видим по соотношениям (19) и (25), для обеспечения наиболее полного механического удаления поверхностной влаги необходимо минимизировать величину **h** в (19) и максимизировать  $\varphi$  в (25), то есть минимизировать второе слагаемое в (25). И то, и другое может быть осуществлено одним из очевидных и реальных путей – увеличением объемной силы **g**, что достигается использованием метода встряхивания.

Количественная оценка механических колебаний показывает, что при частоте встряхивания емкости с продуктом  $\omega = 2$  Герца, с амплитудой  $A = 0,25\text{м}$  удастся увеличить второе слагаемое уравнения (25) почти вдвое – в 1,8 раза, при этом толщина остающейся на поверхности плода жидкостной пленки также уменьшается в 1,8 раза.

Таким образом, процесс механического встряхивания позволяет почти вдвое снизить количество влаги, остающейся на поверхности единичного плода (с 3,2мг до 1,7 мг), и тем самым почти вдвое снизить энергозатраты на испарение в процессе последующей досушки.

При этом на осуществление процесса механического съема 1,5 мг влаги с плода кураги затрачивается энергия:

$$W = M \omega^2 A^2 = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}.$$

В случае конвективно-тепловой осушки поверхностной влаги, только на тепловую составляющую, без учета аэродинамических расходов, потребуется энергия:

$$Q = m C_p (T_2 - T_1) = 1,5 \cdot 10^{-6} \cdot 1860 \cdot (45 - 25) = 55,8 \cdot 10^{-3} \text{ Дж}, \text{ что почти в 15 раз превышает энергоемкость механического процесса съема поверхностной влаги.}$$

### Список литературы

1. В.Г. Левич. Физико-химическая гидродинамика. - М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. - 700 с.
2. Г. Шлихтинг. Теория пограничного слоя.- М.: «Наука», 1969. – 744 с.
3. Пеленко В.В., Арет В.А., Гусев Б.К., Пеленко Ф.В. Течение вязкопластических нелинейных сред с пограничным проскальзыванием // Вестник Красноярского государственного аграрного университета: Межвуз. сб. науч. тр. - Красноярск: Крас. ГАУ, 2008. - Вып. №2. - С. 54-57.
4. Пеленко В.В., Арет В.А., Васильев Д.А., Морозов Е.А., Пеленко Ф.В. Течение продуктов обработки растительного сырья в перерабатывающих аппаратах // Пищевая технология. - М.: Известия ВУЗов, 2008. - Вып. №5-6. - С. 77-80.
5. Зайцев А.В., Пеленко Ф.В. Моделирование течения вязкой жидкости в трубе // [Электронный ресурс]: электронный научный журнал «Процессы и аппараты пищевых производств». – Электронный журнал. – Санкт-Петербург: СПбГУНиПТ, 2012. - №1. – март 2012.
6. Л.С. Артюшков. Динамика неньютоновских жидкостей. – Л.: ЛКИ, 1979.-228 с.