

УДК 532.5.01

## **Применение уравнения Бюргерса в качестве модельного уравнения динамики вязкой среды в канале**

*Канд. техн. наук* **Зайцев А.В.** zai\_@inbox.ru,  
*канд. физ.-мат. наук* **Кудашов В.Н.** kdslv@mail.ru  
*Университет ИТМО*  
*Институт холода и биотехнологий*  
*921002, Санкт-Петербург, ул. Ломоносова, 9*

*Расчет нестационарного течения вязкой жидкости в канале представляет собой сложную математическую задачу и производится обычно численными методами с применением вычислительной техники. Для исследования устойчивости и сходимости вычислительных алгоритмов предлагается использовать точные аналитические решения уравнения Бюргерса в качестве модельного уравнения динамики вязкой среды в канале.*

*Ключевые слова:* динамика вязкой жидкости, уравнение Бюргерса, модельное уравнение, точное решение.

---

## **The use of burgers' equation as a model equation for the dynamics of viscous medium in a channel**

*Ph.D.* **A.V. Zaitsev** zai\_@inbox.ru,  
*Ph.D.* **V.N. Kudashov** kdslv@mail.ru,  
*University ITMO*  
*Institute of Refrigeration and Biotechnologies*  
*191002, Russia, St. Petersburg, Lomonosov str., 9*

*Calculating the transient flow of viscous fluids in a pipe is a complex mathematical problem usually solved by computer-aided numerical techniques. Burgers' equation is offered as a tool for modelling the dynamics of viscous medium in a channel while studying convergence and stability of computing algorithms.*

*Keywords:* dynamics of viscous fluids, Burgers' equation, model equation, exact solution.

---

Решение сложной задачи нестационарного течения вязкой жидкости в канале с учетом реальных физических условий, таких, как зависимость теплофизических свойств от температуры, различные гидродинамические режимы течения, наличие объёмных сил и др. сводится к решению системы дифференциальных уравнений, в том числе уравнения Навье-Стокса с известными проблемами существования и гладкости решений. Основным встречающимся в литературных источниках методом решения различных

задач при применении уравнений Навье-Стокса является конечно-разностная аппроксимация, например [1]. При этом главной проблемой является достижение устойчивости и сходимости. Известны условия сходимости, полученные для относительно простых задач. Однако при приближении постановки задачи к реальным условиям обеспечить сходимость возможно только в результате численного эксперимента на конкретной модели.

С этой целью предлагается применить методику численного исследования параметров сходимости и устойчивости выбираемых разностных схем. Для разработки такой методики следует иметь некое модельное уравнение и иметь его точное решение. Далее в качестве такого уравнения предлагается использовать уравнение Бюргерса, близкое по своему виду к стандартным уравнениям газовой динамики.

Запишем уравнение Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (1)$$

Здесь аналогами физических величин и функций процесса динамики вязких сред являются:  $u$  – скорость потока;  $t$  – время;  $x$  – координата вдоль потока;  $\mu$  – вязкость.

Мы хотим построить решения уравнения Бюргерса при  $x \in [0, L]$ ,  $t \in [0, \infty)$ , с граничными условиями

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, t \in [0, \infty). \quad (2)$$

Для построения таких решений воспользуемся преобразованием Коула-Хопфа [2], сводящее нелинейное уравнение (1) к уравнению теплопроводности, являющемуся линейным.

Пусть функция  $v(x, t)$  является решением уравнения

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (3)$$

Тогда функция

$$u = -2\mu \frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4)$$

удовлетворяет уравнению Бюргерса. Преобразование (4) называется преобразованием Коула-Хопфа.

Чтобы найти решения уравнения (1) с граничными условиями (2), как видно из (4), достаточно найти функцию  $v(x,t)$ , при  $x \in [0, L]$ ,  $t \in [0, \infty)$ , удовлетворяющую уравнению (3) и граничным условиям

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial v}{\partial x}(L,t) = 0, t \in [0, \infty). \quad (5)$$

При этом необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$v(x,t) \neq 0, \quad x \in [0, L], \quad t \in [0, \infty). \quad (6)$$

Используя метод Фурье (см. [3]) можно убедиться, что существует счётное множество функций, удовлетворяющих уравнению (3) и граничным условиям (5):

$$v_n(x,t) = e^{-\mu\lambda_n^2 t} \cos(\lambda_n x), \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{L}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

Так как  $|v_n(x,t)| \leq 1$  при  $t \geq 0$ , то функции

$$\tilde{v}_n(x,t) = v_n(x,t) + C \quad (8)$$

являются решениями уравнения (3) с граничными условиями (5). Неравенство (6), очевидно, выполнено, если константа  $C > 1$ .

Так как  $\partial v_n / \partial x = -\lambda_n e^{-\mu\lambda_n^2 t} \sin(\lambda_n x)$ , то из (4) получаем требуемые функции

$$u_n(x,t) = \frac{2\mu\lambda_n e^{-\mu\lambda_n^2 t} \sin(\lambda_n x)}{e^{-\mu\lambda_n^2 t} \cos(\lambda_n x) + C}$$

Перепишем их в виде

$$u_n(x,t) = \frac{2\mu\lambda_n \sin(\lambda_n x)}{\cos(\lambda_n x) + C e^{\mu\lambda_n^2 t}}, \quad \lambda_n = \frac{\pi n}{L}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Заметим, что  $n$ -ая функция  $u_n(x,t)$  имеет ровно  $n-1$  корней внутри интервала  $(0, L)$ .

На рис. 1, 2 приведены графики первых двух функций распределения величин  $u_1$  и  $u_2$  вдоль координаты  $x$  в различные моменты времени при  $\mu = 0,1$ ,  $C = 1,5$ .

Таким образом, в дальнейшем развитие методики численного исследования сходимости и устойчивости может быть основано на использовании для построения разностной модели исходного уравнения (1) с граничными условиями (2), а получаемое сеточное решение может оцениваться в сравнении с точным решением (9).

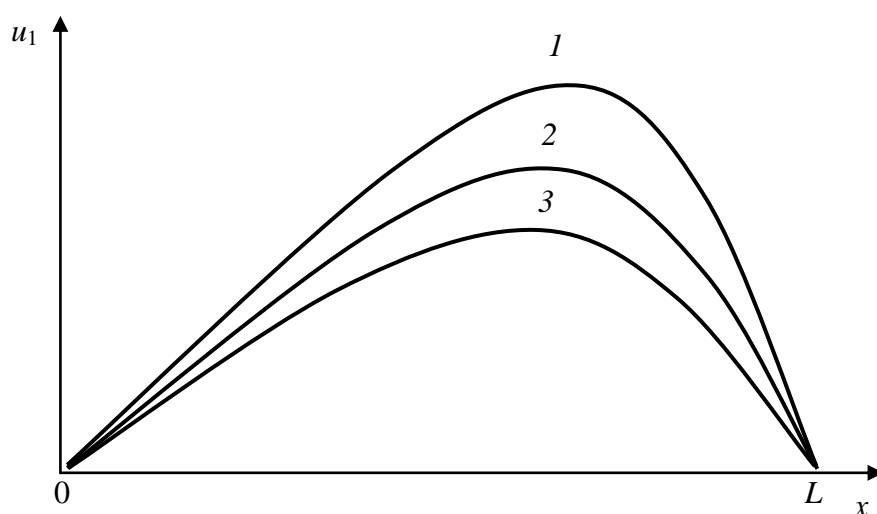


Рис. 1. Распределение  $u_1$  вдоль  $x$ :  
 $1 - t = 0,3$ ;  $2 - t = 0,5$ ;  $3 - t = 0,7$

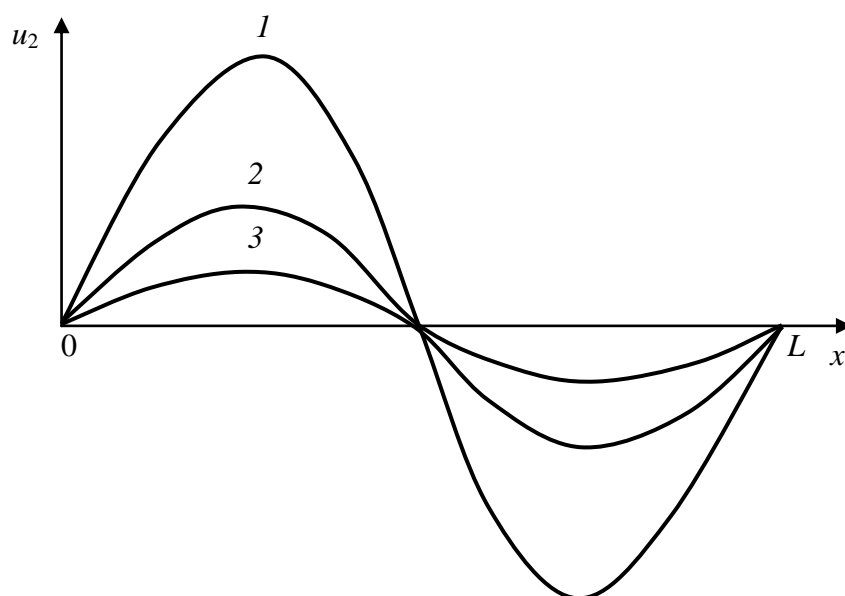


Рис. 2. Распределение  $u_2$  вдоль  $x$ :  
 $1 - t = 0,3$ ;  $2 - t = 0,5$ ;  $3 - t = 0,7$

## Литература

1. Зайцев А.В., Пеленко Ф.В. Моделирование течения вязкой жидкости в трубе // Научный журнал СПбГУНиПТ. Серия: Процессы и аппараты пищевых производств (электронный журнал) / СПбГУНиПТ. – № 1. – Март. 2012. Режим доступа к журн.: <http://processes.open-mechanics.com/journals> свободный.
2. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны: Пер. с англ. / Под. ред А.Б. Шабата. – М.: Мир, 1977. – 622 с.
3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1988. – 512 с.